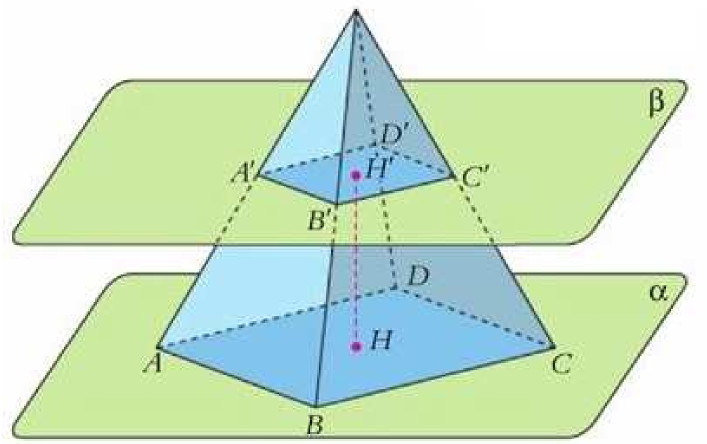
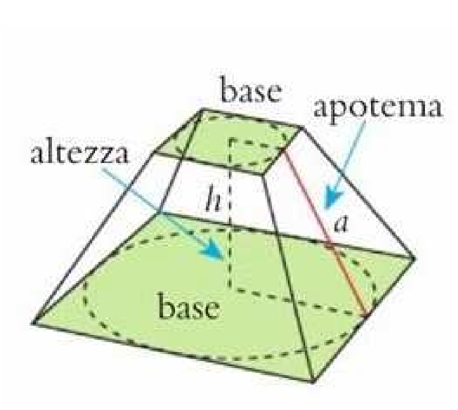
*Dimostriamo la formula per trovare il **volume** del **tronco di piramide** o di **cono**.*

I ragazzi della 3ª D (a.s. 2010-2011) si sono svegliati e allora bisogna accontentarli! La formula per calcolare il volume del tronco di piramide e del tronco di cono non li convince affatto...Bisogna allora dimostrare che sia proprio così come è scritta sul libro.

La formula dice che: $V = \frac{\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right) \times h}{3}$, dove A_B è l'area della base maggiore, A_b è l'area della base minore e h l'altezza del tronco.





Per seguire la dimostrazione dovete ricordarvi cosa significa che due figure sono simili e amare i passaggi algebrici con radici e prodotti notevoli...Cominciamo. La dimostrazione è valida sia per il tronco di piramide che per quello di cono.

Indichiamo con H l'altezza della piramide in figura, prima che venga tagliata dal piano β e con h, come già detto, l'altezza del tronco di piramide generato. Risulta chiaro che il volume del tronco di piramide è la differenza tra il volume della piramide intera e quello della piramide piccola che sovrasta il tronco. E' anche evidente che queste due piramidi sono simili e quindi tutte le dimensioni corrispondenti sono in proporzione. Il rapporto di similitudine, considerando le altezze della piramide grande (H) e di quella piccola ($H-h$) e le rispettive aree di base, è: $k = \frac{H}{H-h} = \sqrt{\frac{A_B}{A_b}}$, ricordatevi infatti che $k^2 = \frac{A_B}{A_b}$. Iniziamo quindi i passaggi algebrici:

$$\frac{H}{H-h}=\sqrt{\frac{A_B}{A_b}} \Rightarrow H\sqrt{A_b}=(H-h)\sqrt{A_B} \Rightarrow H\sqrt{A_b}=H\sqrt{A_B}-h\sqrt{A_B} \Rightarrow H\sqrt{A_B}-H\sqrt{A_b}=h\sqrt{A_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}\right)=h\sqrt{A_B} \Rightarrow H=\frac{h\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}.$$

I passaggi algebrici continuano...Mi spiace...

Sottraiamo sia a primo che a secondo membro una stessa quantità e cioè h:

$H-h=\frac{h\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}-h \Rightarrow H-h=h\left(\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}-1\right)$, otteniamo così l'altezza della piramide piccola in funzione dell'altezza del tronco e delle aree delle basi maggiore e minore. A questo punto possiamo calcolare il volume del tronco come differenza tra il volume delle due piramidi:

$V_{tronco}=\frac{A_B \times H}{3}-\frac{A_b \times (H-h)}{3}=\frac{1}{3}\left[A_B \times H-A_b \times (H-h)\right]$. Al posto di $H-h$ possiamo sostituire l'espressione sopra riportata e continuare a fare passaggi algebrici...

$V_{tronco}=\frac{1}{3}\left[A_B \times H-A_b \times h\left(\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}-1\right)\right]$, facendo il minimo comun denominatore dentro la parentesi tonda e semplificando un po' si ottiene:

$V_{tronco}=\frac{1}{3}\left(A_B \times H-\frac{A_b \times h \times \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}\right)$, dove sostituiamo l'espressione trovata sopra per H ottenendo:

$V_{tronco}=\frac{1}{3}h\left(\frac{A_B\sqrt{A_B}-A_b\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}\right)$. Per ottenere la formula che è scritta sul libro bisogna fare ancora qualche passaggio...Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\frac{\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}}$ e ricordando il prodotto notevole somma per differenza di un binomio, otteniamo:

$$V_{tronco}=\frac{1}{3}h\frac{A_B^2-A_b\sqrt{A_BA_b}+A_B\sqrt{A_BA_b}-A_b^2}{A_B-A_b}=\frac{1}{3}h\frac{A_B^2-A_b^2+(A_B-A_b)\sqrt{A_BA_b}}{A_B-A_b}=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{(A_B-A_b)\left(A_B+A_b+\sqrt{A_BA_b}\right)}{A_B-A_b}$$

e semplificando guardate un po' cosa si ricava:

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}h\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right) = \frac{\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right) \times h}{3}.$$

Anche in questo caso lancio una sfida...Un 10 e lode a chi saprà dimostrare questa formula.

Con affetto, Manuela Casasoli.