***ERONE**, ma come ti è venuto in mente?*

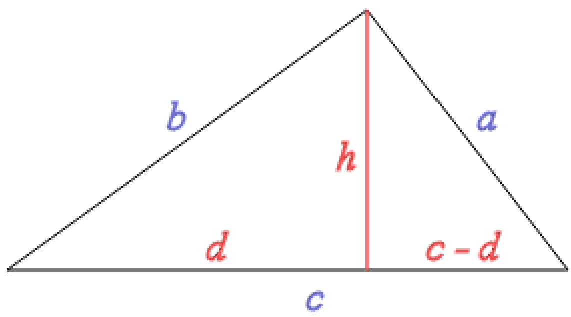
I ragazzi della 2ª C (a.s. 2011-2012) hanno visto la formula di Erone, si sono spaventati, poi l'hanno applicata, si sono convinti che non è difficile farlo, ma si arrovellano perché non riescono a capire come sia venuta in mente ad Erone una formula così!

La formula dice che l'area di un triangolo di lati *a*, *b* e *c* è data da:

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

dove $p=\frac{a+b+c}{2}$, cioè il semiperimetro.

La formula di Erone è spesso giudicata male dai ragazzi della secondaria di primo grado. La guardano e si spaventano. Invece si può dimostrare semplicemente con il teorema di Pitagora e qualche passaggio algebrico, sicuramente alla portata dei ragazzi del terzo anno. E allora proviamoci.



Nella figura potete osservare un triangolo qualsiasi di lati *a*, *b*, *c* e altezza *h*, che divide il lato *c* in due segmenti, *d* e *c* – *d*. Scriviamo la formula in un modo un po' diverso:

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow A^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow 4A^2=4p(p-a)(p-b)(p-c)\ .$$

Ora scriviamo il primo e il secondo termine di questa uguaglianza in un altro modo.

Iniziamo con $4A^2$. L'area del triangolo è: $A=\frac{c\times h}{2}=\frac{ch}{2}$, quindi $A^2=\frac{(ch)^2}{4}\Rightarrow 4A^2=(ch)^2$, il primo termine lo possiamo scrivere in questo modo, che è del tutto equivalente a $(ch)^2=(cb)^2-(cd)^2$. Infatti, applicando il teorema di Pitagora: $h^2=b^2-d^2$ e con qualche passaggio:

$h^2=b^2-d^2\Rightarrow c^2h^2=c^2(b^2-d^2)\Rightarrow (ch)^2=c^2b^2-c^2d^2\Rightarrow (ch)^2=(cb)^2-(cd)^2$. Ma allora, se dimostriamo che il secondo termine della formula di Erone è uguale a $(cb)^2-(cd)^2$, avremo dimostrato la formula stessa. Per fare tutto ciò preparatevi una buona dose di pazienza per seguire i passaggi algebrici che verranno.

L'obiettivo è quindi dimostrare che $4p(p-a)(p-b)(p-c)=(cb)^2-(cd)^2$. Iniziamo da lontano. Si può dimostrare che $(s+q)^2-(s-q)^2=4sq$, infatti:

$(s+q)^2-(s-q)^2=s^2+2sq+q^2-s^2+2sq-q^2=4sq$.

Allora guardate l'espressione $4p(p-a)(p-b)(p-c)$ sotto una forma diversa come se $p(p-a)=s$ e $(p-b)(p-c)=q$. Sapendo che $(s+q)^2-(s-q)^2=4sq$ possiamo scrivere $[p(p-a)+(p-b)(p-c)]^2-[p(p-a)-(p-b)(p-c)]^2=4p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Dobbiamo allora dimostrare che

$[p(p-a)+(p-b)(p-c)]^2=(cb)^2$ e $[p(p-a)-(p-b)(p-c)]^2=(cd)^2$. Per fare ciò dovete sostituire $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ e amare l'algebra.

Cominciamo:

$$p(p-a)+(p-b)(p-c)=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)+\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=$$
$$=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)+\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)+\frac{1}{4}(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(-a^2+ab+ac-ab+b^2+bc-ac+bc+c^2\right)+\frac{1}{4}\left(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(-a^2+b^2+2bc+c^2+a^2-b^2+2bc-c^2\right)=\frac{1}{4}(+4bc)=bc$$

Ora l'ultimo sforzo:

$$p(p-a)-(p-b)(p-c)=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)-\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=$$
$$=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)-\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)-\frac{1}{4}(a-b+c)(a+b-c)=$$

e aiutandoci con i passaggi fatti sopra, ma facendo attenzione al fatto che c'è un segno meno, otteniamo:

$$=\frac{1}{4}\left(-a^2+b^2+2bc+c^2-a^2+b^2-2bc+c^2\right)=\frac{1}{4}\left(-2a^2+2b^2+2c^2\right)=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Guardando la figura e pensando sempre al teorema di Pitagora è facile capire che: $b^2=d^2+h^2$ e $a^2=(c-d)^2+h^2$. Possiamo allora sostituire:

$$\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{-\left(c^2-2cd+d^2+h^2\right)+d^2+h^2+c^2}{2}=\frac{-c^2+2cd-d^2-h^2+d^2+h^2+c^2}{2}=\frac{2cd}{2}=cd$$

Abbiamo così dimostrato la formula di Erone, che, scritta in questo modo $4A^2=4p(p-a)(p-b)(p-c)$, è uguale a $(ch)^2=(cb)^2-(cd)^2$, dimostrabile applicando il teorema di Pitagora e un po' di algebra.

I ragazzi di seconda dovranno solo aspettare un anno ancora per poter familiarizzare con l'algebra e capire la dimostrazione fino in fondo. Invece un bel 10 e lode in palio per i ragazzi di terza che ripeteranno la dimostrazione in classe.

Da dove ho copiato la dimostrazione e preso l'immagine:

http://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Erone

Ciao, Manuela (manuela_casasoli@yahoo.it)