Fionda gravitazionale

1 La velocità

La velocità è una grandezza vettoriale, come tale è caratterizzata da una **intensità**, una **direzione** ed un **verso**. Si rappresenta con un **segmento con una punta a freccia**. La retta passante per il segmento definisce la direzione, la freccia il verso (data una retta ce ne sono due possibili), la lunghezza del segmento, infine, è proporzionale all'intensità.
Supponiamo che, come mostrato nella figura di sinistra, un cannone spari, ad alzo zero, cioè orizzontalmente, un proiettile con una velocià che ha intensità pari a 200 km/h. In questo caso, il vettore velocità è

$$\vec{v} = (200, 0)\,\mathrm{km/h}\,,$$

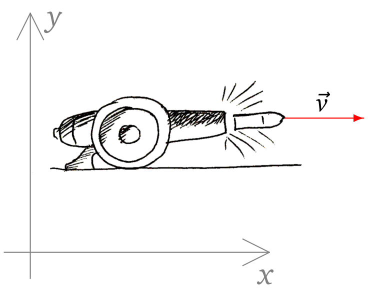
infatti il proiettile si muove lungo la direzione dell'asse delle x, asse orizzontale, e nella stessa direzione, quindi il vettore ha solo la componente x, la prima, e tale componente è positiva in quanto, come detto, il verso del proiettile è lo stesso dell'asse delle x.
Se posizionassimo il cannone su un carrello ferroviario, come mostrato nella figura centrale, e il carrello avesse una velocità $\vec{v}_c = (100, 0)\,\mathrm{km/h}$, le velocità del proiettile rispetto ad un osservatore a terra sarebbe la somma

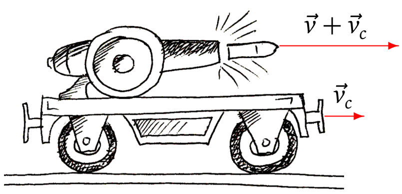
$$\vec{v} + \vec{v}_c = (300, 0)\,\mathrm{km/h}\,.$$

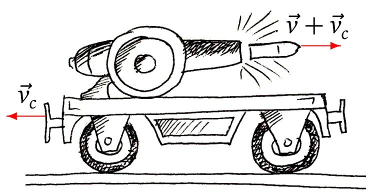
Avendo le due velocità la stessa direzione e lo stesso verso, **l'intensità della somma è la somma delle intensità**.
Infine, se il carrello si muovesse nel verso opposto, ovvero avesse una velocità $\vec{v}'_c = (-100, 0)$ km/h, come mostrato nella figura di destra, la velocità del proiettile rispetto all'osservatore a terra sarebbe

$$\vec{v} + \vec{v}'_c = (100, 0)\,\mathrm{km/h}\,.$$

In questo caso le due velocità hanno la stessa direzione ma verso opposto, ne consegue che **l'intensità della somma è la differenza delle intensità presa con il segno** "+", cioè 100 km/h.

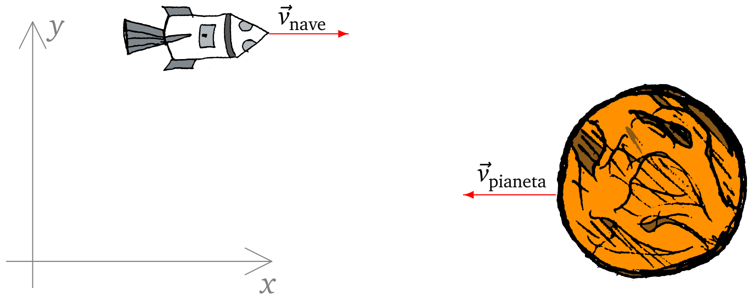






2 Cos'è e come funziona la fionda gravitazionale

Consideriamo una nave spaziale che si muove rispetto ad un osservatore solidale con il Sole con velocità $\vec{v}_{\text{nave}}$ verso un pianeta in moto, con velocità $\vec{v}_{\text{pianeta}}$, nella stessa direzione ma con verso opposto, come in figura.



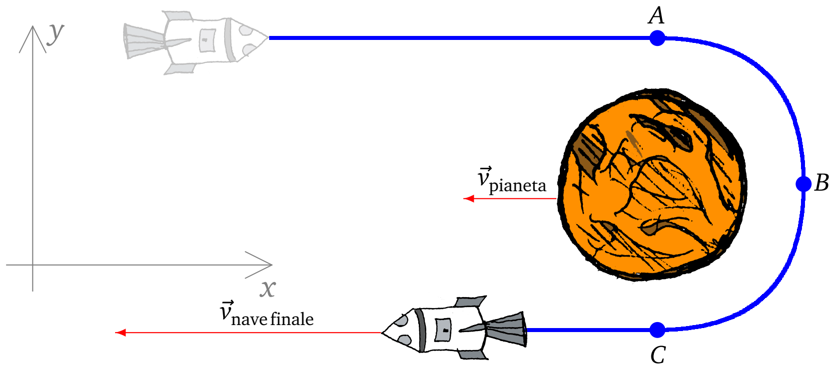
Indicando con x l'asse parallelamente al quale si muovono e considerando solo le due dimensioni xy, gli assi cartesiani sono mostrati in grigio, possiamo scrivere le velocità come

$$\vec{v}_{\text{nave}} = (v_n, 0), \qquad \vec{v}_{\text{pianeta}} = (-v_p, 0),$$

dove i valori positivi v_n e v_p sono rispettivamente le intensità delle velocità della nave e del pianeta. La velocità relativa iniziale della nave rispetto al pianeta è

$$\vec{v}_{\text{rel. iniziale}} = \vec{v}_{\text{nave}} - \vec{v}_{\text{pianeta}} = \big(v_n - (-v_p), 0\big) = (v_n + v_p, 0),$$

l'intensità è pari alla somma delle intensità.
La nave e il pianeta non sono in rotta di collisione, supponiamo che la nave abbia una traiettoria tale da permetterle di entrare in orbita del pianeta, descriverne metà e riuscire nella direzione opposta, seguendo la traiettoria mostrata in blu nella figura sottostante. Il moto orbitale è determinato dalla reciproca attrazione gravitazionale tra il pianeta e la nave, la velocità relativa fa sì che la nave non cada sul pianeta, ma lo aggiri rimanendo a una distanza costante per metà percorso, prima di essere "fiondata" nella direzione opposta. Nel momento in cui la nave entra in orbita, punto A della figura, la velocità della nave rispetto alla superficie del pianeta è $\vec{v}_{\text{rel. iniziale}} = (v_n + v_p, 0)$.



Questa velocità relativa, pur variando in direzione e verso, rimane costante in modulo durante tutta la semi-orbita, fino al punto C ed oltre. Ad esempio nel punto B la velocità relativa vale $\big(0, -(v_n + v_p)\big)$, ovvero ha sempre intensità $v_n + v_p$, ma come direzione ha quella dell'asse delle y, mentre il verso è opposto, punta verso il basso. In uscita dall'orbita, nel punto C, il vettore della velocità relativa ha compiuto una rotazione di 180^o, corrispondente a metà orbita, ha quindi la stessa direzione della velocità iniziale, quella nel punto A ad esempio, ma il verso è opposto, si ha

$$\vec{v}_{\text{rel. finale}} = -\vec{v}_{\text{rel. iniziale}} = \big(-(v_n + v_p), 0\big).$$

La velocità della nave rispetto all'osservatore solidale con il Sole si ottiene sommando vettorialmente la velocità relativa finale e quella del pianeta, si ha

$$\vec{v}_{\text{nave finale}} = \vec{v}_{\text{rel. finale}} + \vec{v}_{\text{pianeta}} = \big(-(v_n + v_p), 0\big) + (-v_p, 0) = \big(-(v_n + 2v_p), 0\big).$$

La nave ha incrementato la sua velocità passando da un'intensità v_n a $v_n + 2v_p$, ovvero ha avuto un aumento pari al doppio della velocità del pianeta.
Il pianeta ha ceduto un piccola parte della sua energia alla nave spaziale. Poichè l'energia totale deve conservarsi, la

variazione tra situazione iniziale e finale deve essere nulla. Indicando con V_{i-p}, V_{i-n}, V_{f-p} e V_{f-n} le intensità delle velocità iniziali e finali del pianeta e della nave, le energie cinetiche iniziale e finale sono

$$
\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{2}M_p V_{i-p}^2 + \frac{1}{2}M_n V_{i-n}^2 = \frac{1}{2}M_p V_p^2 + \frac{1}{2}M_n V_n^2 \\
E_f &= \frac{1}{2}M_p V_{f-p}^2 + \frac{1}{2}M_n V_{f-n}^2 = \frac{1}{2}M_p V_{f-p}^2 + \frac{1}{2}M_n (V_n + 2v_p)^2\,,
\end{aligned}
$$

dove M_p e M_n sono le masse del pianeta e della nave rispettivamente, $v_{i-p} = v_p$ e $v_{i-n} = v_n$ sono le intensità delle velocità iniziali del pianeta e della nave, la velocità finale della nave ha intensità $v_{f-n} = v_n + 2v_p$. Uguagliando le energie finale e iniziale e risolvendo rispetto a v_{f-p}

$$
\begin{aligned}
E_f &= E_i \\
\frac{1}{2}M_p v_{f-p}^2 + \frac{1}{2}M_n (v_n + 2v_p)^2 &= \frac{1}{2}M_p v_p^2 + \frac{1}{2}M_n v_n^2 \\
M_p v_{f-p}^2 + M_n (v_n + 2v_p)^2 &= M_p v_p^2 + M_n v_n^2 \\
v_{f-p} &= \sqrt{\frac{M_p v_p^2 + M_n\left[v_n^2 - \left(v_n + v_p\right)^2\right]}{M_p}} \\
v_{f-p} &= \sqrt{v_p^2 + \frac{M_n\left[v_n^2 - \left(v_n + v_p\right)^2\right]}{M_p}} \\
v_{f-p} &= \sqrt{v_p^2 - \frac{M_n\left(v_p^2 + 2v_p v_n\right)}{M_p}} \\
v_{f-p} &= v_p\sqrt{1 - \frac{M_n\left(1 + 2v_n/v_p\right)}{M_p}}\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Il pianeta diminuisce la sua velocità, infatti la radice quadrata rappresenta un numero minore di uno. Tale variazione è tanto minore quanto maggiore il rapporto tra la massa del pianeta e quella della nave spaziale.

3 Un caso particolare con il pianeta Giove

Consideriamo una nave spaziale di massa $M_n = 100000$ kg, che si muove con velocità

$$\vec{v}_n = (36000, 0)\,\mathrm{km/h}$$

verso il pianeta Giove, che ha massa e velocità pari a

$$M_G = 1,898 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}\,, \qquad \vec{v}_G = (-47000, 0)\,\mathrm{km/h}\,.$$

Se la nave compie la manovra descritta nel paragrafo precedente avrà una velocità finale

$$\vec{v} = (-(36000 + 2\cdot 470000), 0)\,\mathrm{km/h} = (-1300000, 0)\,\mathrm{km/h}$$

con intensità più che triplicata. Il pianeta Giove perde un po' della sua energia cinetica, perdita che si traduce in una riduzione della sua velocità orbitale. La nuova velocità orbitale è data dalla fomula (1), ovvero, indicando con $v_G = 47000$ km/h e $v_n = 36000$ km/h le intensità delle velocità iniziali del pianeta Giove e della nave,

$$
\begin{aligned}
v_{f-G} &= v_G\sqrt{1 - \frac{M_n\left(1 + 2v_n/v_G\right)}{M_G}} \\
v_{f-G} &= (47000\,\mathrm{Km/h})\sqrt{1 - \frac{(10000\,\mathrm{kg})(1 + 2\cdot 36000/47000)}{1,898\times 10^{27}\,\mathrm{kg}}} \\
v_{f-G} &= 46999,9999999999999999997\,\mathrm{Km/h}\,.
\end{aligned}
$$

In altri termini la sua velocità si è ridotta dello

$$0,0000000000000000000007\%\,.$$