

Nome.....Cognome.....

ALGEBRA

1. Esegui le seguenti operazioni con numeri relativi:

a) $-2 + 20 - 31 + 15 - 4 - 8 =$

Soluzione

$$-2 + 20 - 31 + 15 - 4 - 8 = +18 - 31 + 15 - 4 - 8 = -13 + 15 - 4 - 8 = 2 - 4 - 8 = -2 - 8 = -10$$

b) $\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) =$

Soluzione

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5-6}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{1}{6}$$

c) $\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{5}{24}\right) =$

Soluzione

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{5}{24}\right) = \frac{-9+8}{12} \times \frac{24}{5} = -\frac{1}{12} \times \frac{24}{5} = -\frac{2}{5}$$

d) $\frac{\frac{3}{8} - 2}{3 - \frac{3}{4}} =$

Soluzione

$$\frac{\frac{3}{8} - 2}{3 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3-16}{8}}{\frac{12-3}{4}} = -\frac{13}{8} : \frac{9}{4} = -\frac{13}{8} \times \frac{4}{9} = -\frac{13}{18}$$

2. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 1\right) : \left(-2 - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) : \left(1 - \frac{13}{15}\right)\right] : \left(1 - \frac{5}{12}\right) =$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 1 \right) : \left(-2 - \frac{3}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) : \left(1 - \frac{13}{15} \right) \right] : \left(1 - \frac{5}{12} \right) = \\
& = \left[\left(\frac{5-3-15}{15} \right) : \frac{-10-3}{5} + \frac{15-20+6}{30} : \frac{15-13}{15} \right] : \frac{12-5}{12} = \\
& = \left[-\frac{13}{15} \times \left(-\frac{5}{13} \right) + \frac{1}{30} \times \frac{15}{2} \right] \times \frac{12}{7} = \\
& = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] \times \frac{12}{7} = \frac{4+3}{12} \times \frac{12}{7} = 1
\end{aligned}$$

3. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $(-2)^4 =$

Soluzione

$$(-2)^4 = +16$$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$

Soluzione

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = +\frac{1}{64}$$

c) $(-9)^{20} : (-9)^{18} =$

Soluzione

$$(-9)^{20} : (-9)^{18} = (-9)^2 = +81$$

d) $\left[(-2)^2\right]^3 =$

Soluzione

$$\left[(-2)^2\right]^3 = (-2)^6 = +64$$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

Soluzione

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

4. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right]^8 : \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} \right)^5 \right\}^3 : \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^5 =$$

Soluzione

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right]^8 : \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} \right)^5 \right\}^3 : \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^5 = \\ & = \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right]^8 : \left(\frac{6-5}{4} \right)^5 \right\}^3 : \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^5 = \\ & = \left\{ \left[\frac{1}{4} \right]^8 : \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}^3 : \left(\frac{1}{2} \right)^{15} = \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right\}^3 : \left(\frac{1}{2} \right)^{15} = \left(\frac{1}{2} \right)^{18} : \left(\frac{1}{2} \right)^{15} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

5. Calcola il valore della seguente espressione dove compaiono esponenti anche negativi.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right)^{-2}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^{-3}} =$$

Soluzione

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right)^{-2}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^{-3}} = \frac{\left(\frac{12+2-4-9}{12} \right)^{-2}}{\left(\frac{3-2}{6} \right)^{-3}} = \frac{\left(\frac{1}{12} \right)^{-2}}{\left(\frac{1}{6} \right)^{-3}} = \frac{12^2}{6^3} = \frac{12 \times 12}{6 \times 6 \times 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6. *Quesito Invalsi 2012-1013*. In un rifugio di alta montagna, il 31 marzo 2012 alle ore 6:00, è stata registrata una temperatura di 8 gradi sotto lo zero; alle ore 15:00 la temperatura era salita di 12 gradi, mentre alle ore 22:00 era scesa di 14 gradi rispetto alle 15:00. Quale delle seguenti espressioni permette di calcolare la temperatura alle ore 22:00?

a) $(-8) + (-12) - (-14) =$

b) $(-8) + (+12) - (-14) =$

c) $(-8) - (+12) - (+14) =$

d) $(-8) + (+12) - (+14) =$

Soluzione

La risposta d) è quella corretta.

GEOMETRIA

7. Calcola la misura del raggio di un cerchio sapendo che la sua area è $28,26 \text{ cm}^2$. Quanto è lunga la circonferenza che delimita questo cerchio?

Soluzione

Il raggio del cerchio è $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{28,26}{3,14}} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$. La circonferenza è lunga $C = 2\pi r = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi \approx 18,84 \text{ cm}$.

8. Calcola la superficie di un settore circolare di raggio pari a 6 cm che corrisponde a un angolo di 120° . Quanto è lungo l'arco che delimita questo settore?

Soluzione

L'area del cerchio è pari a $A = \pi r^2 = 36\pi \approx 113,04 \text{ cm}^2$. L'area del settore corrispondente all'angolo di 120° si calcola impostando la seguente proporzione:

$113,04 : 360 = A_s : 120 \Rightarrow A_s = \frac{113,04 \times 120}{360} = 37,68 \text{ cm}^2$. La lunghezza dell'arco corrispondente la

possiamo calcolare nella maniera seguente: $l = \frac{A_s \times 2}{r} = \frac{37,68 \times 2}{6} = 12,56 \text{ cm}$.

9. Calcola l'area di una corona circolare delimitata da due circonferenze lunghe rispettivamente $24\pi \text{ cm}$ e $18\pi \text{ cm}$.

Soluzione

I raggi delle due circonferenze che delimitano la corona sono lunghi rispettivamente 12 e 9 cm. L'area della corona è $A_{corona} = 12^2 \pi - 9^2 \pi = 144\pi - 81\pi = 63\pi \approx 197,82 \text{ cm}^2$.

10. Calcola la differenza tra l'area del cerchio di raggio 2 cm e l'area del quadrato circoscritto.

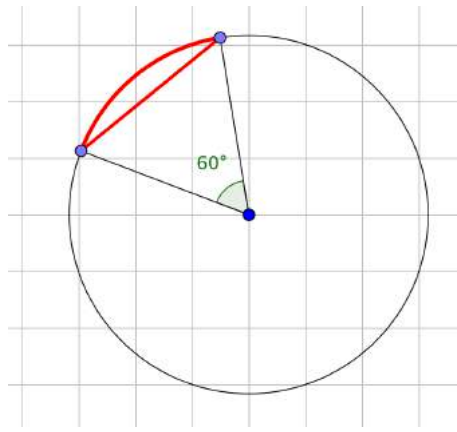
Soluzione

L'area del cerchio è $A = \pi r^2 = 4\pi \approx 12,56 \text{ cm}^2$. L'area del quadrato circoscritto è pari a 16 cm^2 , perché il suo lato corrisponde con il diametro del cerchio. Quindi, la differenza è $16 - 12,56 = 3,44 \text{ cm}^2$.

11. Disegna un segmento circolare corrispondente a un angolo di 60° e calcolane l'area sapendo che il raggio della circonferenza misura 4 cm.

Soluzione

Il segmento circolare è quello delimitato dall'arco e dal segmento in rosso:



Il triangolo è equilatero e il suo lato corrisponde al raggio della circonferenza che è lungo 4 cm. Il settore circolare ha un'area che è 1/6 di quella del cerchio perché $360 : 60 = 6$. L'area del settore è pari a $A_s = \pi r^2 : 6 = \pi \times 16 : 6 \approx 8,373 \text{ cm}^2$. L'altezza del triangolo equilatero può essere calcolata applicando il teorema di Pitagora o ricordando direttamente che $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 3,464 \text{ cm}$. L'area del triangolo equilatero è $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 3,464}{2} = 6,928 \text{ cm}^2$. L'area del segmento circolare è, quindi, $8,373 - 6,928 = 1,445 \text{ cm}^2$.

12. Osserva la figura a lato e indica che rapporto c'è tra la misura della circonferenza maggiore e quella della circonferenza minore. Spiega il tuo ragionamento.

Soluzione

Il raggio della circonferenza minore corrisponde al lato del quadrato in blu, mentre quello della circonferenza maggiore corrisponde alla diagonale del quadrato in blu. Sapendo che nel quadrato $d = l\sqrt{2}$, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza maggiore e quella minore è proprio $\sqrt{2}$.

