VERIFICA DI MATEMATICA - 6 marzo 2017 classe 3ª D

Nome...Cognome..

ALGEBRA

1. Calcola i seguenti prodotti notevoli:

a) $(2a+b)(2a-b)=$

Soluzione

$(2a+b)(2a-b)=4a^2-b^2$

b) $\left(\frac{3}{4}x-y\right)^2=$

Soluzione

$\left(\frac{3}{4}x-y\right)^2=\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}xy+y^2$

c) $(a-2b)^3=$

Soluzione

$(a-2b)^3=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

2. Risolvi le due equazioni ed esegui la **verifica**:

a) $3x-7+4(x+3)=5x+3-2(x-3)$

Soluzione

$3x-7+4(x+3)=5x+3-2(x-3)\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-7+4x+12=5x+3-2x+6\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$

la verifica è: $3-7+16=5+3+4\Rightarrow 12=12$

b) $\frac{2(x-1)}{4}-\frac{x-1}{5}=\frac{3}{10}+\frac{x-2}{2}$

Soluzione

$\frac{2(x-1)}{4}-\frac{x-1}{5}=\frac{3}{10}+\frac{x-2}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{10x-10-4x+4}{20}=\frac{6+10x-20}{20}\Rightarrow$

$\Rightarrow -4x=-8\Rightarrow x=2$

la verifica è: $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}+0\Rightarrow\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}\Rightarrow\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

3. Risolvi le seguenti equazioni.

a) $\frac{9x+5}{14}-\frac{3(x-1)}{7}+\frac{3}{2}=\frac{5}{14}x-\frac{4(x-3)}{7}$

Soluzione

$$\frac{9x+5}{14}-\frac{3(x-1)}{7}+\frac{3}{2}=\frac{5}{14}x-\frac{4(x-3)}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{9x+5-6x+6+21}{14}=\frac{5x-8x+24}{14}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x=-8\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

b) $\frac{(2x+2)(2x-2)}{5}-\frac{3x-2}{2}=\frac{(2x-1)^2}{5}+\frac{1}{2}$

Soluzione

$$\frac{(2x+2)(2x-2)}{5}-\frac{3x-2}{2}=\frac{(2x-1)^2}{5}+\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{2(4x^2-4)-15x+10}{10}=\frac{2(4x^2-4x+1)+5}{10}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x^2-8-15x+10=8x^2-8x+2+5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -7x=5\Rightarrow x=-\frac{5}{7}$$

c) $(x-5)(x+4)+x=29$

Soluzione

$$(x-5)(x+4)+x=29\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+4x-5x-20+x=29\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-x+x=20+29\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x_{1,2}=\pm 7$$

4. I $\frac{4}{5}$ di un numero diminuiti di 4 sono uguali a $\frac{2}{3}$ del numero stesso aumentati di 2. Di che numero si tratta? Imposta un'equazione e risolvi il problema.

Soluzione

L'equazione che risolve il problema è la seguente:

$\frac{4}{5}x-4=\frac{2}{3}x+2\Rightarrow\frac{12x-60}{15}=\frac{10x+30}{15}\Rightarrow 2x=90\Rightarrow x=45$. Il numero è 45.

5. Calcola il perimetro di un quadrato sapendo che aumentando la misura di un lato di 5 cm e diminuendo quella di un suo lato consecutivo di 3 cm, l'area del rettangolo così ottenuto è uguale a quella del quadrato aumentata di 7 cm^2.

Soluzione

L'equazione che permette di ottenere la lunghezza del lato del quadrato è la seguente: $(x+5)(x-3)=x^2+7 \Rightarrow x^2-3x+5x-15=x^2+7 \Rightarrow 2x=22 \Rightarrow x=11$. Il lato del quadrato è lungo 11 cm e quindi il suo perimetro è 44 cm.

6. Una scatola contiene delle caramelle gialle (al limone) e delle caramelle verdi (alla menta). Se aggiungessimo una caramella gialla, le caramelle gialle rappresenterebbero un quarto del contenuto della scatola mentre, se ne togliessimo una, sarebbero solo il quinto del contenuto della scatola. Quante caramelle verdi contiene la scatola? (*Giochi matematici 2007*)

Soluzione

Indichiamo con g il numero di caramelle gialle e con v il numero di caramelle verdi. Leggendo il testo si ha che:

$$g+1=\frac{g+1+v}{4}$$
$$g-1=\frac{g-1+v}{5}$$

Possiamo ricavare v sia dalla prima che dalla seconda equazione:

$$g+1=\frac{g+1+v}{4} \Rightarrow 4g+4=g+1+v \Rightarrow v=3g+3$$
$$g-1=\frac{g-1+v}{5} \Rightarrow 5g-5=g-1+v \Rightarrow v=4g-4$$

Da cui si ricava che $3g+3=4g-4 \Rightarrow g=7$. Sostituendo il valore di g si ottiene che $v=3g+3=3\times 7+3=24$. Le caramelle verdi sono 24.

GEOMETRIA

7. Disegna un rettangolo. Che solido si ottiene facendolo ruotare di 360° intorno alla sua altezza? Disegna il solido. Scrivi le formule per calcolare l'area totale e il volume del solido ottenuto.

Soluzione

Si ottiene un cilindro, un'altezza è l'asse di rotazione e l'altra è la generatrice del solido di rotazione. L'area totale del cilindro è $A_{TOT}=2\pi r^2+2\pi rh$ e il suo volume è $V=\pi r^2 h$.

8. La somma dell'altezza e del diametro di base di un cilindro misura 49 cm e il loro rapporto è $\frac{3}{4}$. Calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro.

Soluzione

L'altezza e il diametro di base del cilindro sono rispettivamente 49 : 7 x 3 = 21 cm e 49 : 7 x 4 = 28 cm. Il raggio di base è quindi lungo 14 cm. L'area totale è quindi

$A_{TOT} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi 14^2 + 2\pi 14 \times 21 = 980\pi$ cm^2. Il volume del cilindro è $V = \pi r^2 h = \pi 14^2 \times 21 = 4116\pi$ cm^3.

9. La superficie totale di un cilindro equilatero è di 864π cm^2. Calcola il volume del cilindro.

Soluzione

Nel cilindro equilatero l'altezza è uguale al diametro di base, cioè è il doppio del raggio di base. La superficie totale è quindi $A_{TOT} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \times 2r = 6\pi r^2$. Applicando la formula inversa si può calcolare la lunghezza del raggio di base e dell'altezza del cilindro. $r = \sqrt{\frac{A_{TOT}}{6\pi}} = \sqrt{\frac{864\pi}{6\pi}} = \sqrt{144} = 12$ cm e l'altezza è 24 cm. Il volume del cilindro è quindi $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \times 12^3 = 3456\pi$ cm^3.

10. Calcola il volume e il peso in kg di una piramide quadrangolare regolare di alluminio ($P_S = 2{,}7$ g/cm^3), sapendo che l'area della superficie totale e il perimetro di base sono rispettivamente di 3240 cm^2 e 120 cm.

Soluzione

Il lato del quadrato di base è lungo 120 : 4 = 30 cm. L'area di base della piramide è quindi 900 cm^2. L'area laterale della piramide è 3240 – 900 = 2340 cm^2. Usando la formula inversa dell'area laterale possiamo calcolare la lunghezza dell'apotema della piramide. $a = \frac{2A_L}{2p} = \frac{2 \times 2340}{120} = 39$ cm. Usando il teorema di Pitagora possiamo calcolare l'altezza della piramide $h = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$ cm. Il volume della piramide è quindi $V = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{900 \times 36}{3} = 10800$ cm^3. La piramide pesa $P = P_S \times V = 2{,}7 \times 10800 = 29160$ g, cioè 29,16 kg.

11. La cavità di un recipiente è un prisma retto alto 40 cm, che ha per base un trapezio isoscele avente l'area di 180 cm^2. In esso è contenuta dell'acqua che arriva a $\frac{3}{4}$ della sua altezza.

a) Quanti litri di acqua sono contenuti nel recipiente?

b) Se in esso si immerge un cubo massiccio di acciaio ($P_S = 7{,}5$ g/cm^3) che pesa 1620 g, di quanto si innalza il livello dell'acqua?

c) Calcola l'area della superficie laterale della cavità, sapendo che l'altezza del trapezio di base è lunga 12 cm e che la base maggiore è il doppio della base minore.

Soluzione

a) Il volume della cavità è $V = 180 \times 40 = 7200 \text{ cm}^3$. L’acqua contenuta è 7200 : 4 x 3 = 5400 cm^3, che equivale a 5400 ml, cioè 5,4 litri.

b) Il volume del cubo immerso è $V = \frac{P}{P_S} = \frac{1620}{7,5} = 216 \text{ cm}^3$. Questo è anche il volume di acqua che “si alza” una volta immerso il cubo. Considerata l’area di base della cavità, il livello dell’acqua si alza di 216 : 180 = 1,2 cm.

c) La somma delle due basi del trapezio è (180 x 2) : 12 = 30 cm. La base minore è lunga 30 : 3 = 10 cm e quella maggiore è 10 x 2 = 20 cm. La proiezione del lato obliquo sulla base maggiore è lunga (20 – 10) : 2 = 5 cm. Il lato obliquo è lungo $l_{ob} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$. Il perimetro di base della cavità è quindi 13 + 13 + 10 + 20 =56 cm. L’area laterale della cavità è quindi 56 x 40 = 2240 cm^2.