VERIFICA DI MATEMATICA - 3 aprile 2017 classe 3ª D

Nome...Cognome...

ALGEBRA

1. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni e **verifica la prima equazione**.

a) $\frac{6x-4}{4}-\frac{3(x-4)}{5}-\frac{1}{2}x=\frac{5x+3}{10}-\frac{6}{5}x$

Soluzione

$$\frac{6x-4}{4}-\frac{3(x-4)}{5}-\frac{1}{2}x=\frac{5x+3}{10}-\frac{6}{5}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 30x-20-12x+48-10x=10x+6-24x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x+14x=-28+6\Rightarrow 22x=-22\Rightarrow x=-1$$

La verifica è:

$$\frac{6x-4}{4}-\frac{3(x-4)}{5}-\frac{1}{2}x=\frac{5x+3}{10}-\frac{6}{5}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{5}{2}+3+\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\Rightarrow 1=1$$

b) $4\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=9\left(\frac{1}{3}x-2\right)^2-4$

Soluzione

$$4\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=9\left(\frac{1}{3}x-2\right)^2-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)=9\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4\right)-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4=x^2-12x+36-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12x=36\Rightarrow x=3$$

c) $\frac{2x-1}{3}>\frac{5x-1}{12}+2x$

Soluzione

$$\frac{2x-1}{3}>\frac{5x-1}{12}+2x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x-4>5x-1+24x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -21x>3\Rightarrow x<-\frac{3}{21}\Rightarrow x<-\frac{1}{7}$$

2. Imposta un'equazione per risolvere questo problema. La differenza di due numeri è 18 e il triplo del minore supera di 4 il doppio del maggiore. Determina i due numeri.

Soluzione

Dai dati del problema possiamo scrivere le seguenti relazioni: $x - y = 18$ e $3y = 2x + 4$, da cui si ha che $x = 18 + y$. Sostituendo si ha che $3y = 2(18 + y) + 4 \Rightarrow 3y = 36 + 2y + 4 \Rightarrow y = 40$. Il numero minore è 40 e il maggiore è 40 + 18 = 58.

3. I bracci della potenza e della resistenza di una leva sono rispettivamente 18 cm e 12 cm. Sapendo che la resistenza è il doppio della potenza meno 5 N, calcola il valore di ciascuna forza.

Soluzione

Ricordando la relazione di equilibrio di una leva, $b_P \times P = b_R \times R$, e sapendo che $R = 2P - 5$, si può scrivere che $18 \times P = 12 \times (2P - 5) \Rightarrow 18P = 24P - 60 \Rightarrow 6P = 60 \Rightarrow P = 10$ N e R = 15 N.

4. Disegna il poligono *ABCD* avente per vertici i punti $A(-3;0)$, $B(+1;+3)$, $C(+4;-1)$ e $D(0;-4)$.

a) Di che poligono si tratta?

b) Calcola il perimetro e l'area.

c) Calcola la lunghezza della diagonale $\overline{AC}$.

d) Determina le coordinate del punto medio del segmento $\overline{AD}$.

e) Disegna la retta *r* di equazione $x = 6$ e il simmetrico del quadrilatero ottenuto rispetto alla retta *r*.

Soluzione

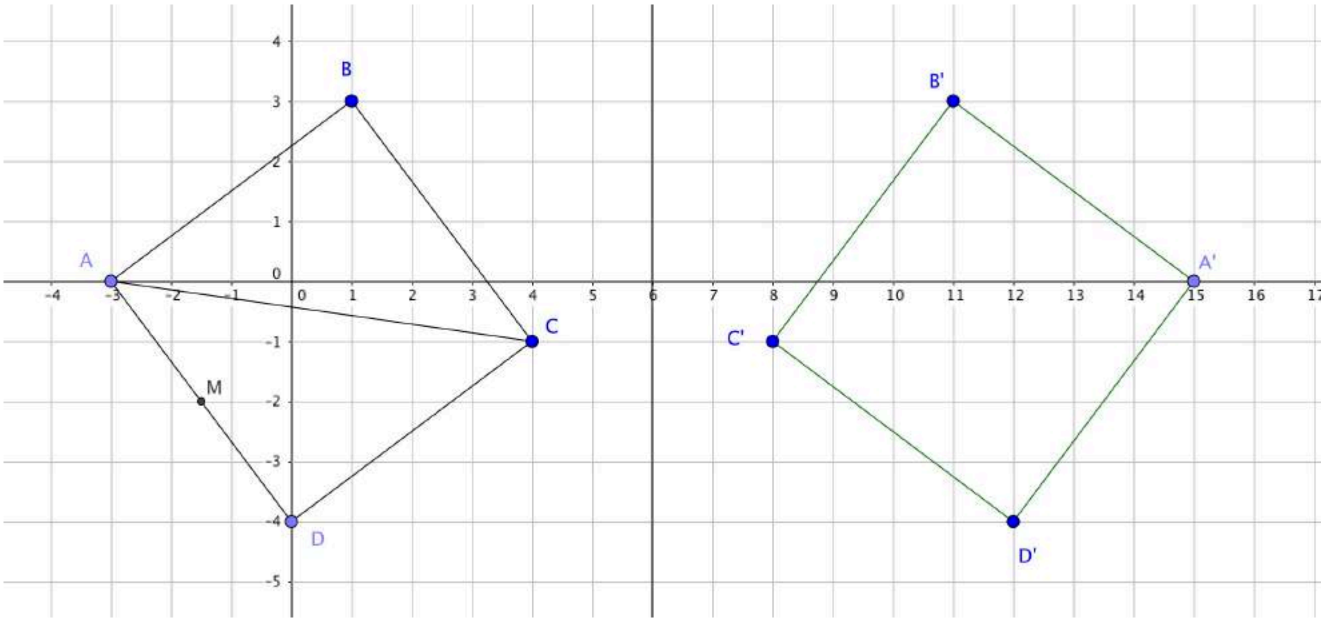
a) Si tratta di un quadrato, i lati sono uguali (5 cm), così come le due diagonali ($5\sqrt{2}$ cm).

b) Il perimetro è 20 cm e l'area è 25 cm^2.

c) La diagonale è lunga $\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-3-4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$ cm.

d) Le coordinate del punto medio di $\overline{AD}$ sono: $x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-3-0}{2} = -\frac{3}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{0-4}{2} = -2$.

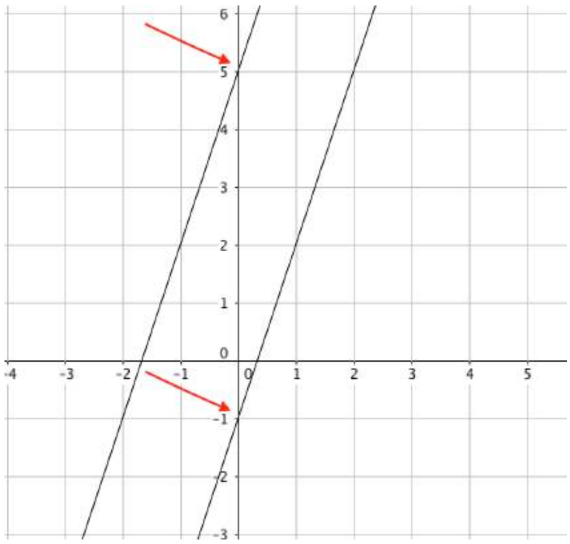
e) Il simmetrico è il poligono con i lati in verde.



5. Rappresenta sul piano cartesiano le rette di equazione $y = 3x - 1$ e $y = 3x + 5$. Come sono tra di loro le due rette? Potevi saperlo prima di disegnarle perché? Spiega cosa rappresentano il coefficiente angolare e il termine noto di una retta, riferendoti anche alle due rette disegnate.

   Soluzione

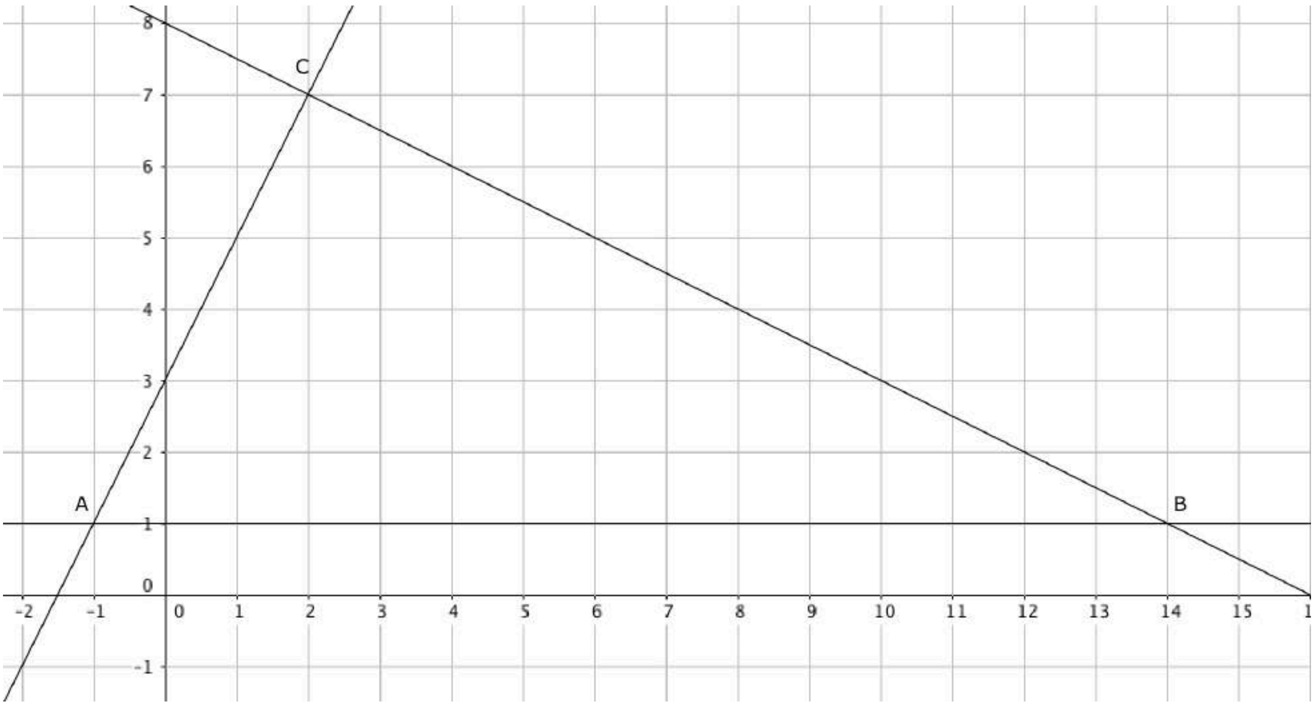
   Le due rette sono parallele e si può dedurre dal coefficiente angolare che è uguale $m = m' = 3$. Il coefficiente angolare rappresenta la pendenza della retta. Due rette parallele hanno la stessa pendenza. Il termine noto è l'ordinata del punto d'intersezione con l'asse delle ordinate, nel grafico le frecce indicano i punti (0;-1) per la prima retta e (0;5) per la seconda.



6. Disegna in un piano cartesiano le rette di equazioni $y = 2x + 3$ e $y = 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 8$. Verifica che il triangolo formato da tali rette è rettangolo. Ricava dal disegno le coordinate dei punti di intersezione delle tre rette e calcola l'area del triangolo.

   Soluzione

Le tre rette intersecandosi formano un triangolo. Il triangolo è rettangolo perché due delle rette sono perpendicolari tra di loro, infatti $m \times m' = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. I punti sono A (-1; 1), B (14;1) e C (2;7).



GEOMETRIA

7. Completa e rispondi alle domande.

a) Dato il volume di un cono il raggio di base è uguale a: $r = \sqrt{\frac{3 \times \ldots}{\ldots \times \ldots}}$

Soluzione

$r = \sqrt{\frac{3 \times V}{\pi \times h}}$

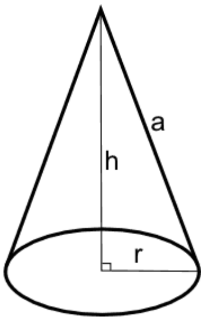
b) Ricordando che in un cilindro equilatero il diametro di base è uguale all'altezza, scrivi le formule per calcolare l'area laterale, quella totale e il volume in funzione del raggio.

Soluzione

Per ricavare le formule richieste è necessario sostituire $h = 2r$. Quindi, $A_L = 2\pi r \times h = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$, $A_T = 4\pi r^2 + 2\pi r^2$ e $V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$.

c) Disegna un cono e scrivi le formule per calcolare l'area laterale, totale e il volume.

Soluzione

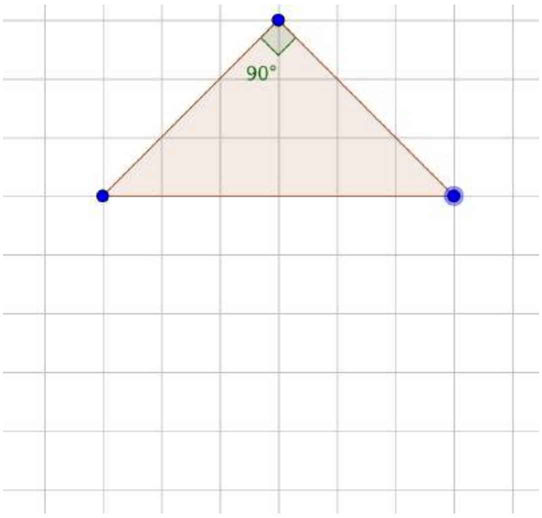


$$A_L = \frac{2\pi r \times a}{2} = \pi r a$$

$$A_T = \pi r a + \pi r^2$$

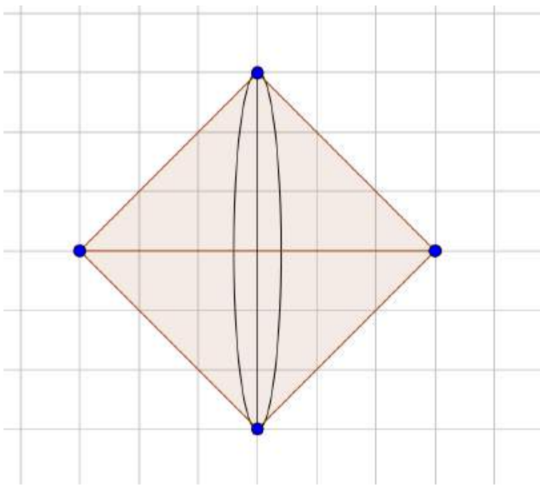
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

d) Descrivi il solido che si ottiene ruotando il triangolo dato di 360° intorno all'ipotenusa.



Soluzione

"Approssimativamente" si ottiene questo:



Si ottengono due coni identici con la base in comune.

8. Una piramide quadrangolare regolare di zinco ($P_S = 7{,}2\ \text{kg/dm}^3$) pesa 73,728 kg e ha lo spigolo di base di 32 cm (attenzione all'equivalenza…). Calcola l'area della superficie totale della piramide.

Soluzione

Il volume della piramide è $V=\frac{P}{P_s}=\frac{73{,}728}{7{,}2}=10{,}24$ $\text{cm}^3 = 10240\ \text{cm}^3$. L'area di base della piramide è $A_b=32^2=1024\ \text{cm}^2$. L'altezza della piramide è quindi $h=\frac{V\times 3}{A_b}=\frac{10240\times 3}{1024}=30\ \text{cm}$. L'apotema della piramide è $a=\sqrt{30^2+16^2}=34\ \text{cm}$. L'area laterale è $A_L=\frac{32\times 4\times 34}{2}=2176\ \text{cm}^2$. L'area totale è $A_{TOT}=2176+1024=3200\ \text{cm}^2 = 32\ \text{dm}^2$.

9. Calcola la misura del raggio di base di un cilindro che ha il volume di $2299\pi\ \text{cm}^3$ e l'altezza che misura 19 cm.

   Soluzione

   Il raggio di base è $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}=\sqrt{\frac{2299\pi}{19\pi}}=11$ cm.

10. La circonferenza di base di un cono misura 207,24 cm. Sapendo che l'apotema misura 65 cm, determina l'area della superficie totale e il volume del cono.

    Soluzione

    Il raggio di base è $r=\frac{C}{2\pi}=\frac{207{,}24}{2\times 3{,}14}=33$ cm. L'altezza è $h=\sqrt{65^2-33^2}=56$ cm. L'area di base è $A_b=\pi 33^2=1089\pi$ cm^2. L'area laterale è $A_L=\pi\times 33\times 65=2145\pi$ cm^2. L'area totale è quindi $A_T=1089\pi+2145\pi=3234\pi\ \text{cm}^2$. Il volume è $V=\frac{1089\pi\times 56}{3}=20328\pi\ \text{cm}^3$.

11. L'area della superficie di una sfera è $900\pi\ \text{cm}^2$. Calcola il volume della sfera.

    Soluzione

    Il raggio della sfera è lungo $r=\sqrt{\frac{A}{4\pi}}=\sqrt{225}=15$ cm. Il volume è quindi $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 15^3=4500\pi\ \text{cm}^3$.

12. Un solido è costituito da un prisma regolare quadrangolare sormontato da un cono avente la base inscritta in quella del prisma. Il perimetro di base del prisma è lungo 64 cm e l'apotema del cono misura 17 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido, sapendo che l'altezza del prisma è il doppio di quella del cono.

    Soluzione

Il lato di base del prisma è 64 : 4 = 16 cm. L'area di base del prisma è quindi $16^2 = 256$ cm^2. Il raggio di base del cono è 16 : 2 = 8 cm. L'altezza del cono è $h_{cono} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm. L'altezza del prisma è quindi 15 x 2 = 30 cm. L'area di base del cono è $A_b = \pi 8^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$. L'area laterale del cono è $A_L = \pi \times 8 \times 17 = 427{,}04 \text{ cm}^2$. L'area laterale del prisma è $A_L = 16 \times 4 \times 30 = 1920 \text{ cm}^2$. L'area totale del solido è $A_{TOT} = 256 + 256 - 200{,}96 + 1920 + 427{,}04 = 2658{,}08 \text{ cm}^2$. Il volume del cono è $V_{cono} = \frac{200{,}96 \times 15}{3} = 1004{,}8 \text{ cm}^3$. Il volume del prisma è $V_{prisma} = 256 \times 30 = 7680 \text{ cm}^3$. Il volume totale del solido è $V_{TOT} = 1004{,}8 + 7680 = 8684{,}8 \text{ cm}^3$.